Analyse 14-08-'02

Tentamenopgave[1]

I

Beschouw de functie f gedefineerd op $\mathbb{R}^2$ door

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + y^2 - 2xy\,.$$

1. Bepaal de stationaire punten van f en hun aard: lokaal maximum, lokaal minimum of zadelpunt.

2. Zou een van de stationaire punten een absoluut maximum of minimum kunnen zijn ?

Aanwijzing: $x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 \geq 0$.

II

Notatie: $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

1. Beschouw de transformatie $\Phi : (x,y) \mapsto (u,v)$ gedefinieerd op $\mathbb{R}^2_+$ door $u = x$, $v = x/y$. Toon aan dat Φ een diffeomorfisme is van $\mathbb{R}^2_+$ op $\mathbb{R}^2_+$ en bereken de inverse transformatie Φ^{-1}.

2. Zij $f : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ een functie van de vorm $f(x,y) = F(x/y)$ met $F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar. Toon aan dat

(1) $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

3. Toon omgekeerd aan dat een continu differentieerbare functie f op $\mathbb{R}^2_+$ die voldoet aan (1) een functie is van de vorm $F(x/y)$.

Aanwijzing: Stel $F(u,v) = f(x,y)$ (d.w.z. $F = f \circ \Phi^{-1}$) en toon aan dat $\dfrac{\partial F}{\partial u} = 0$.

III

1. Formuleer de stelling over transformatie van de variabelen in een meervoudige integraal.

2. Zij $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$. Bereken de integraal

(2) $$\iiint_B \frac{dxdydz}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Aanwijzing: we herinneren aan de primitieve $\int \frac{dt}{1+t^2} = \mathrm{Arctan}(t) + C$.

IV

1. Formuleer de stelling van Weierstrass betreffende maxima en minima.

2. Formuleer de stelling van Lagrange betreffende maxima en minima met één randvoorwaarde.

Zij f de functie gedefinieerd op $\mathbb{R}^3$ door

(3) $$f(x,y,z) = 2x + 2y - z$$

en zij

(4) $$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

3. Toon aan dat f op S een maximum M en een minimum m bereikt.

4. Bereken M en m.

---

[1] De onderdelen I, II, III en IV zijn onafhankelijk.